ISSN 1008-1399
CN61－1315/O1

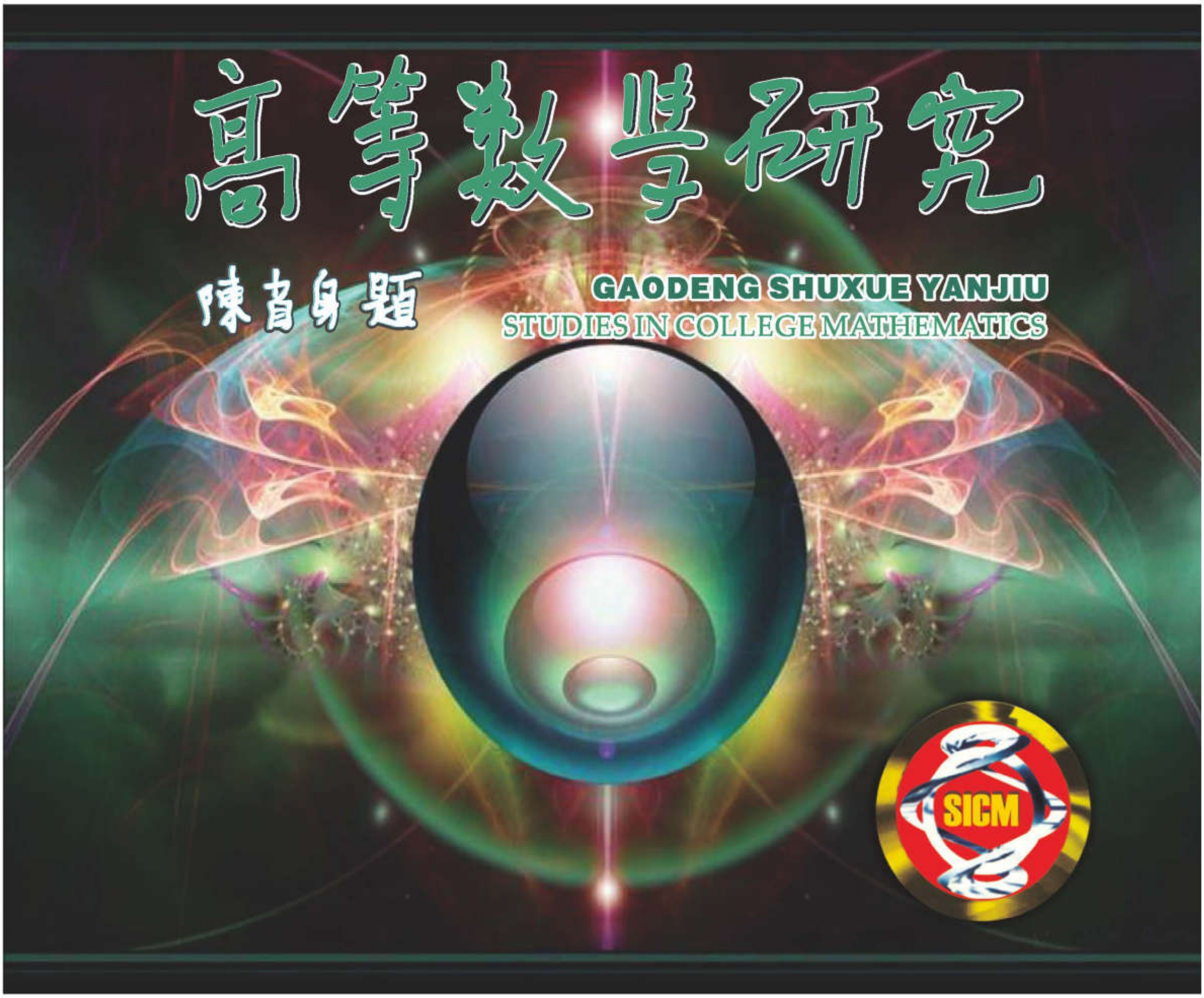
· 国家自然科学基金委员会数学天元基金支持刊物
· 《中国期刊网》、《中国学术期刊》（光盘版）全文收录期刊
· 《中国学术期刊综合评价数据库》来源期刊
· 《万方数据-数字化期刊群》、《中文科技期刊数据库》全文收录期刊
· 《中国核心期刊（遴选）数据库》收录期刊
· 《CEPS思博网-中文电子期刊服务》收录期刊
· 《中国数学文摘》、《中国数学文献数据库》收录期刊
· 2000年获"陕西省优秀科技期刊一等奖"
· 国家新闻出版广电总局第一批认定学术期刊

高等数学研究（双月刊）第二十三卷第四期（总第一九八期）二〇二〇年七月

高等数学研究

陳省身題

GAODENG SHUXUE YANJIU
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS



SICM

2020 4

第23卷 第4期（总第198期）
2020年7月出版
西北工业大学 陕西省数学会 主办

ISSN 1008-1399

目　　次

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2020.04.008

二项分布两种近似分布的收敛速度

李　斐，陈晓娜
（烟台大学 数学与信息科学学院，山东 烟台 264005）

摘　要　以矩母函数为工具推导了二项分布 $B(n,p_n)$ 的泊松逼近的收敛速度，指出其收敛速度与 np_n 收敛于 λ 的速度有关，并与正态逼近的收敛速度做了对比．最后做了模拟计算，验证了定理的结果．

关键词　矩母函数；泊松逼近；二项分布；收敛速度

中图分类号　O212.1　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2020)04－0044－03

Convergent Speeds of Two Approximations to the Binomial Distribution

LI Fei and CHEN Xiaona
(School of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai 264005, China)

Abstract　The convergent speed of the Poisson approximation to the Binomial distribution is studied using the tool of the moment generating function and is compared with the normal approximation. Simulations are used to verify the results.

Keywords　moment generating function, Poisson approximation, Binomial distribution, convergent speed

1　引言

我们引入服从两点分布的随机变量 X_{ij}，事件 A 发生时，$X_{ij}=1$，反之 $X_{ij}=0$，且 $P(X_{ij}=1)=p_i$．将 X_{ij} 写成如下形式，注意到每一行的随机变量是独立同分布的．

$$\begin{array}{l} X_{11}, \\ X_{21}, X_{22}, \\ X_{31}, X_{32}, X_{33}, \\ \cdots\cdots, \\ X_{n1}, X_{n2}, X_{n3}, \cdots, X_{nn}. \end{array}$$

令 $X_n=\sum_{j=1}^{n}X_{ni}$，则 X_n 服从二项分布 $B(n,p_n)$．对于二项分布的计算，我们知道可以用泊松分布和正态分布两种分布来近似计算．当 $\lim_{n\to\infty}np_n=\lambda$ 时，文献[1]指出此时泊松分布要好于正态分布．很多文献（文献[2,3]等）都介绍过二项分布的泊松逼近，但鲜有文献涉及到泊松逼近的收敛速度．文献[3]利用矩母函数和累积生成函数推导出了 Edgeworth 展开式，揭示了正态逼近的收敛速度．受此启发，本文借助矩母函数给出了二项分布泊松逼近的收敛速度，并同正态逼近做了对比，精确比较了在不同情况下两种近似分布的优劣．

2　泊松逼近的收敛速度

我们分两种情况来讨论泊松逼近的收敛速度，分别为 $np_n=\lambda$，以及 $\lim_{n\to\infty}np_n=\lambda$．

2.1　考虑 $np_n=\lambda$ 的情况

利用泊松分布、二项分布的矩母函数，以及傅里叶变换等工具，我们得到二项分布的泊松逼近的收敛速度如下．

定理 1　若 X_n 服从二项分布 $B(n,p_n)$，且 $np_n=\lambda$．令 $F_n(x)$ 表示 X_n 的分布函数，$G(x)$ 为 $P(\lambda)$ 的分布函数．则有

$$F_n(x)=G(x)+O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

证明　X_{ni} 的矩母函数为

$$\psi_{X_{ni}}(t)=Ee^{tX_{ni}}=1+p_n(e^t-1),$$

注意到 $\lim_{n\to\infty}p_n=0$，故对矩母函数取对数，利用 $\log(1+x)$ 的幂级数展开得，

收稿日期：2019－12－23　　修改日期：2020－02－10
基金项目：国家自然科学基金(61503318)．
作者简介：李斐(1982－)，女，山东烟台，博士，讲师，研究方向为多元统计分析，Email：feili@ytu.edu.cn.

$$\log(\psi_{X_{ni}}(t)) = \log(1 + p_n(e^t - 1))$$
$$= p_n(e^t - 1) - \frac{1}{2}(p_n(e^t - 1))^2 + \frac{1}{3}(p_n(e^t - 1))^3 + \cdots,$$

故有，

$$\psi_{X_{ni}}(t) = \exp\{p_n(e^t - 1) - \frac{1}{2}(p_n(e^t - 1))^2 + \frac{1}{3}(p_n(e^t - 1))^3 + \cdots\}$$

因为 $X_n = \sum_{j=1}^{n} X_{ni}$，则 X_n 的矩母函数为

$$\begin{aligned}\psi_{X_n}(t) &= \exp\{np_n(e^t - 1) - \frac{1}{2}n(p_n(e^t - 1))^2 + \frac{1}{3}n(p_n(e^t - 1))^3 + \cdots\} \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1) - \frac{1}{2n}(\lambda(e^t - 1))^2 + \frac{1}{3n^2}(\lambda(e^t - 1))^3 + \cdots\} \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} a_{ij}\left(\frac{1}{n}\right)^i t^j\} \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1)\}\left[1 + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} b_{ij}\left(\frac{1}{n}\right)^i t^j\right] \end{aligned} \tag{2}$$

其中 a_{ij}，b_{ij} 分别为常数系数. 因为

$$\exp\{\lambda(e^t - 1)\} = \exp\left\{\lambda t + \frac{\lambda t^2}{2} + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\right\} = \left(1 + \sum_{k=3}^{\infty} c_k t^k\right)\exp\left\{\lambda t + \frac{\lambda t^2}{2}\right\} \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)，得

$$\psi_{X_{ni}}(t) = e^{\lambda(e^t-1)} + e^{\lambda t + \frac{\lambda t^2}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} r_{ij}\left(\frac{1}{n}\right)^i t^j = e^{\lambda(e^t-1)} + e^{\lambda t + \frac{\lambda t^2}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^i r_i(t). \tag{4}$$

其中 $r_i(t) = \sum_{j=2}^{\infty} r_{ij} t^j$.

令 $G(x)$ 为 $P(\lambda)$ 的分布函数，$N(x)$ 表示正态分布 $N(\lambda, \lambda)$ 的分布函数. 不难验证，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,dG(x) = e^{\lambda(e^t-1)},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,dN(x) = e^{\lambda t + \frac{\lambda t^2}{2}}.$$

以 $\frac{1}{n}$ 的一次项为例，找到 $R_1(x)$，使得下式成立，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,dR_1(x) = \frac{1}{n}e^{\lambda t + \frac{\lambda t^2}{2}} r_1(t).$$

可验证，

$$R_1(x) = \frac{1}{n}r_1(\nabla)(N(x)) = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=2}^{\infty} r_{1j}\nabla^j\right)(N(x)),$$

其中 ∇ 为求导算子. 同理可得到 $R_j(x)$，$j = 1, 2, \ldots$，满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\,dR_j(x) = \frac{1}{n}e^{\lambda t + \frac{\lambda t^2}{2}} r_j(t).$$

对(4)式逆展开，可得

$$F_n(x) = G(x) + R_1(x) + R_2(x) + \cdots,$$

即得(1)式，定理得证.

根据上述定理的结果，泊松逼近的收敛速度为 $O\left(\frac{1}{n}\right)$. 由文献[3]的 Edgeworth 展开式(定理 1.16)可得，正态逼近的收敛速度为 $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. 所以当 $np_n = \lambda$ 时，泊松逼近是好于正态逼近的.

2.2 考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$ 的情况

当 $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$ 时，我们考虑泊松逼近的收敛速度应当与 np_n 收敛于 λ 的速度有关，所以不妨设 $np_n = \lambda + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$，则关于泊松逼近的收敛速度有如下定理.

定理 2 若 X_n 服从二项分布 $B(n, p_n)$，且 $np_n = \lambda + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$，$\alpha > 0$. 令 $F_n(x)$ 表示 X_n 的分布函数，$G(x)$ 为 $P(\lambda)$ 的分布函数. 有

$$F_n(x) = \begin{cases} G(x) + O\left(\frac{1}{n}\right), & \alpha \geqslant 1 \\ G(x) + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), & \alpha < 1 \end{cases}. \tag{5}$$

证明 与式(2)类似的推导可得 X_n 的矩母函数为

$$\psi_{X_n}(t) = \exp\{np_n(e^t - 1) - \frac{1}{2}n(p_n(e^t - 1))^2 + \frac{1}{3}n(p_n(e^t - 1))^3 + \cdots\} \tag{6}$$

对(6)式作进一步化简，并将 $np_n = \lambda + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ 代入得，

$$\begin{aligned}\psi_{X_n}(t) &= \exp\{np_n(e^t - 1)\} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} a_{ijk}\left(\frac{1}{n}\right)^i t^j (np_n)^k \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1)\} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)(e^t - 1) + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty} a_{ijk}\left(\frac{1}{n}\right)^i t^j \left(\lambda + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^k \\ &= \exp\{\lambda(e^t - 1)\}\left\{1 + \sum_{i=\alpha}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} t^j O\left(\frac{1}{n^i}\right)\right\}\cdot\left\{1 + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty} c_{ij} O\left(\frac{1}{n^i}\right) t^j\right\} \\ &= \begin{cases} e^{\lambda(e^t-1)}\left(1 + \sum\limits_{i\geqslant\alpha}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} r_{ij} O\left(\frac{1}{n^i}\right) t^j\right) & \alpha \leqslant 1 \\ e^{\lambda(e^t-1)}\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=2}^{\infty} r_{ij} O\left(\frac{1}{n^i}\right) t^j\right) & \alpha > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

采用定理1类似的方法,可证得(5)式.

由上述定理的结果,以及Edgeworth展开式,可以看出当$\alpha>\frac{1}{2}$时,泊松逼近均好于正态逼近;而当$\alpha=\frac{1}{2}$时,两者收敛速度差不多;当$\alpha>\frac{1}{2}$时,正态逼近好于泊松逼近.具体的比较结果见表1.

表1 两种近似分布的收敛速度比较

分布	$\alpha\geqslant1$	$\frac{1}{2}<\alpha<1$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha<\frac{1}{2}$
泊松逼近	$O\left(\frac{1}{n}\right)$	$O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$	$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$
正态逼近	$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$	$O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

3 模拟结果

针对上述两个定理的结果,随机模拟了几种情况下两种近似分布的收敛速度.表2是当$np_n=\lambda$时的情况,不妨取X_n服从$B(n,\frac{8}{n})$.由表2可见,泊松分布在$n=1000$时已经非常接近二项分布,而正态逼近在$n=2000$时才接近二项分布.

表2 $B(n,\frac{8}{n})$两种近似分布的收敛速度比较

分布	$P(X_n\leqslant1)$	$P(X_n\leqslant5)$	$P(X_n\leqslant10)$	$P(X_n\leqslant15)$
	$n=100$	$n=500$	$n=1\ 000$	$n=2\ 000$
二项分布	0.002319	0.189023	0.816685	0.991895
泊松分布	0.003019	0.191236	0.815886	0.991769
正态分布	0.004937	0.142479	0.761131	0.993428

当$np_n=\lambda+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$时,我们模拟了$\frac{1}{2}<\alpha<1$时的情况,不妨取$\alpha=\frac{6}{7}$,模拟结果见表3.可以看出,泊松逼近的效果要明显好于正态逼近,泊松逼近在$n=500$时已非常接近二项分布.

表3 $B\left(n,\frac{7}{n+n^{\frac{1}{7}}}\right)$两种近似分布的收敛速度比较

分布	$P(X_n\leqslant1)$	$P(X_n\leqslant5)$	$P(X_n\leqslant10)$	$P(X_n\leqslant15)$
	$n=100$	$n=500$	$n=1\ 000$	$n=2\ 000$
二项分布	0.006809	0.303273	0.903548	0.997673
泊松分布	0.007295	0.300708	0.901479	0.997593
正态分布	0.010169	0.226573	0.874208	0.998798

表4、表5分别是$\alpha<\frac{1}{2}$(取$\alpha=\frac{1}{5}$),$\alpha=\frac{1}{2}$时的模拟情况,由表4可以看出此时泊松逼近的效果明显不如正态逼近(正态逼近在$n=1000$时已非常接近二项分布).由表5可以看出当$\alpha=\frac{1}{2}$时,两者收敛速度差不多.

表4 $B\left(n,\frac{7}{n+n^{\frac{4}{5}}}\right)$两种近似分布的收敛速度比较

分布	$P(X_n\leqslant1)$	$P(X_n\leqslant5)$	$P(X_n\leqslant10)$	$P(X_n\leqslant15)$
	$n=100$	$n=500$	$n=1\ 000$	$n=2\ 000$
二项分布	0.036862	0.540115	0.972321	0.999688
泊松分布	0.007295	0.300708	0.901479	0.997593
正态分布	0.033086	0.425995	0.969098	0.999945

表5 $B\left(n,\frac{8}{n+\sqrt{n}}\right)$两种近似分布的收敛速度比较

分布	$P(X_n\leqslant1)$	$P(X_n\leqslant5)$	$P(X_n\leqslant10)$	$P(X_n\leqslant15)$
	$n=100$	$n=500$	$n=1\ 000$	$n=2\ 000$
二项分布	0.004649	0.222531	0.840272	0.993340
泊松分布	0.003019	0.191236	0.815886	0.991769
正态分布	0.007857	0.166571	0.790860	0.994915

最后,我们还模拟了$\alpha>1$时的情况,取$\alpha=2$,即$X_n\sim B\left(n,\frac{7}{n+n^{-1}}\right)$,结果见表6.由表6可知,当$n=200$时,泊松分布的值就已经很接近二项分布了,而在$n=2000$时,正态分布才很接近二项分布,因此当$\alpha>1$时,二项分布的泊松逼近收敛速度快于正态逼近的收敛速度.

表6 $B\left(n,\frac{7}{n+n^{-1}}\right)$两种近似分布的收敛速度比较

分布	$P(X_n\leqslant1)$	$P(X_n\leqslant5)$	$P(X_n\leqslant10)$	$P(X_n\leqslant15)$
	$n=100$	$n=500$	$n=1\ 000$	$n=2\ 000$
二项分布	0.006017	0.296177	0.902228	0.997640
泊松分布	0.007295	0.300708	0.901479	0.997593
正态分布	0.009351	0.220812	0.872416	0.998773

参考文献

[1] E. L. Lehmann. Elements of Large－Sample Theory [M]. New York:Springer, 1999.
[2] 李贤平. 概率论基础[M]. 北京:高等教育出版社,1997.
[3] Jun Shao. Mathematical Statistics[M]. New York: Springer, 2003.

Studies in College Mathematics

(Bimonthly, Started in 1954)

Vol.23,No.4(Serial No.198), Jul . 2020

Sponsored by Northwestern Polytechnical University and Shaanxi Mathematical Society

Edited and published by Editorial Board of Studies in College Mathematics
(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, PRC)

Editor-in-Chief CUI Junzhi

Printed by Xi'an Kunming Printing House

Distributed by China International Book Trading Corporation
(P.O.Box 399, Beijing 100044,PRC)

CN 61-1315/O1/ISSN1008-1399

邮发代号：52-192

投稿信箱：gdsxyj@yeah.net

国内定价：20.00元

在线投稿：http://gdsxyj.cbpt.cnki.net