

第四章 微分方程

教学内容	第一节 建立微分方程模型
教学目标	<p>知识目标： 了解微分方程模型的应用背景；理解微分方程模型的方法和原理，并对根据规律、微元法、模拟近似法、房室法四种建模方法进行对比.掌握微分方程模型的应用技巧。</p> <p>能力目标： 通过实例演示、问题驱动等方式激发学生学习的积极性，通过观察对比、学生交流、师生交流、小组探究等多种形式，培养学生的逻辑思维能力、分析判断能力、和解决问题能力。</p> <p>素质目标： 培养学生敢于质疑、善于分析、勇于创新的精神；培养学生的自主学习意识和团队协作精神；培养学生脚踏实地、不畏艰辛、锲而不舍的精神。</p>
授课学时	2 学时
教学重点	根据规律、微元法、模拟近似法、房室法四种建模方法与应用技巧
教学难点	应用中四种建模方法的选取
教学方法	采用问题驱动法、案例演示法、启发式讲授法及自主学习法相结合，以教师的讲解为主，学生的课堂报告、分组讨论为辅，充分调动学生学习的主动性和思考问题的积极性。
教学手段	以课堂讲授为主，主要是多媒体课件和板书相结合的形式。同时借助在线资源，如慕课、雨课堂等平台。
教学过程	<p>根据本次课内容分为若干教学节段，每个节段里，说明教师活动，学生活动，设计意图等模块。</p> <p>在教学的过程中以案例教学贯穿始终，完整地展示提出问题、分析问题、解决问题的建模过程. 以引导为主，注重学生自主学习。</p>

(一) 课堂引入：通过科学发展历程，从 1676 年莱布尼兹第一次提出微分方程的概念,到 1937 年庞特里亚金提出了结构稳定性概念，微分方程在 动力系统中得到广泛应用，在这 200 多年的发展史中，微分 方程经历了四个重要阶段，这些阶段倾注了莱布尼茨、伯努 利、欧拉、泰勒、黎卡提、刘维尔、柯西、庞加莱、李雅普诺夫 等一大批数学家的心血，体现了他们对数学科学孜孜不倦的探索和勇于钻研的奋进精神进行引入。（约 10 分钟）

【教师活动】讲授牛顿运动定律、基尔霍夫电流及电压定律、物质的放射性规律、曲线的切线的性质等；在社会科学、生物学、医学、经济学等学科的实践中，常常要用模拟近似法等研究背景。

【学生活动】自由讨论微分方程在工程等领域的应用背景、范围。

【设计意图】由学生熟悉的内容引入新课，有利于引发学生的认知热情，提高探究新知的兴趣。

(二) 理论讲解：在引入的基础上，给出根据规律、微元法两种建模方法的案例和相关知识点（约 30 分钟）

【教师活动】给出根据规律、微元法、模拟近似法、房室法四种建模方法的案例和相关知识点。

知识点 1:涉及某些函数的变化率，我们就可以根据相应的规律，列出常微分方程；

知识点 2: 用微积分的微元分析法建立常微分方程模型，实际上是寻求一些微元之间的关系式，在建立这些关系式时也要用到已知的规律或定理；

【学生活动】听讲，有问题可提问。

(三) 知识点小结：

同学们全体对于进行根据规律、微元法两种方法展开讨论（约 5 分钟）

(四) 理论讲解：给出根据规律、微元法、模拟近似法、房室法四种建模方法的案例和相关知识点（约 30 分钟）

【教师活动】给出根据规律、微元法、模拟近似法、房室法四种建模方法的案例和相关知识点。

知识点 3:模拟近似所建立的微分方程从数学上求解或分析解的性质,再去同实际情况作对比,观察这个模型能否模拟、近似某些实际的现象;

知识点 4:房室是指机体的一部分,药物在一个房室内呈均匀分布,即血药浓度是常数,而在不同房室之间则按照一定的规律进行药物的转移。

【学生活动】听讲,有问题可提问

【设计意图】从学生通常有切身体会的实际问题出发,更能提高学生的学习兴趣,在问题解决后也能得到更多的收获感。

(五) 知识点小结 (10 分钟)

【教师活动】在实际的微分方程建模过程中,也往往是上述方法的综合应用。不论应用哪种方法,通常要根据实际情况,作出一定的假设与简化,并要把模型的理论或计算结果与实际情况进行对照验证,以修改模型使之更准确地描述实际问题并进而达到预测预报的目的。

(六) 课程思政 (5 分钟)

通过模型教育当代大学生要用科学的态度,注重自然科学与人文科学的结合,科技创新的关键是创新人才的培养,因此,作为高校学生,有义务也有责任使自己成为创新人才,这样才能为祖国的强大贡献自己的一份力量。通过这样的教育,让学生理解创新对国家发展的重要性,同时也增强了学生的创新意识。培养学生把实际问题转化成为数学问题的能力,加强理论与实践相结合,及时地使所学的知识灵活运用,提高学生解决问题的综合能力以及辩证思维的能力。

(七) 课堂总结 (5 分钟)

总结本次课的教学内容:

1(: 微分方程模型的意义;

2(: 微分方程模型的建立方法;

课后作业

学生课下寻找生活中跟数学模型有关的小案例，进行分析。

教学内容	第二节 微分方程模型的解法
教学目标	<p>知识目标： 了解微分方程模型的应用背景；理解微分方程模型求解的方法和原理，大多数微分方程是求不出解析解的，因此数值解法就是非常重要的手段.掌握微分方程模型的数值解法。</p> <p>能力目标： 通过实例演示、问题驱动等方式激发学生学习的积极性，通过观察对比、学生交流、师生交流、小组探究等多种形式，培养学生的逻辑思维能力、分析判断能力、和解决问题能力。</p> <p>素质目标： 培养学生敢于质疑、善于分析、勇于创新的精神；培养学生的自主学习意识和团队协作精神；培养学生脚踏实地、不畏艰辛、锲而不舍的精神。</p>
授课学时	2 学时
教学重点	微分方程模型的数值解法
教学难点	微分方程模型的数值解法
教学方法	采用问题驱动法、案例演示法、启发式讲授法及自主学习法相结合，以教师的讲解为主，学生的课堂报告、分组讨论为辅，充分调动学生学习的主动性和思考问题的积极性。
教学手段	以课堂讲授为主，主要是多媒体课件和板书相结合的形式。同时借助在线资源，如慕课、雨课堂等平台。
教学过程	<p>根据本次课内容分为若干教学节段，每个节段里，说明教师活动，学生活动，设计意图等模块。</p> <p>在教学的过程中以案例教学贯穿始终，完整地展示提出问题、分析问题、解决问题的建模过程。以引导为主，注重学生自主学习。</p> <p>(一) 课堂引入：常微分方程的理论指出，很多方程的定解问题虽然存在，但在生产和科研中所处理的微分方程往往很复杂且大</p>

多求不出解析解，因此常求其能满足精度要求的近似解。常微分方程的数值解法常用来求近似解，由于它提供的算法能通过计算机便捷地实现，因此近年来得到迅速的发展和广泛的应用进行引入（约 10 分钟）

【教师活动】讲授建立微分方程模型只是解决问题的第一步，通常需要求出方程的解来说明实际现象，并加以检验等知识点。

【学生活动】自由讨论微分方程的解析解和数值解的区别。

【设计意图】由学生熟悉的内容引入新课，有利于引发学生的认知热情，提高探究新知的兴趣。

（二）理论讲解：在引入的基础上，使用 Matlab 软件求解相应的微分方程模型。（约 30 分钟）

【教师活动】在引入的基础上，使用 Matlab 软件求解相应的微分方程模型。

知识点 1: Matlab 软件在求解相应的微分方程时的注意事项；

知识点 2: 使用 Matlab 软件求解相应的微分方程模型案例；

案例 1: 求解 $y''' - y'' = x, y(1) = 8, y'(1) = 7, y''(2) = 4$ 解析解。

解 利用 Matlab 程序求得

$$y = -\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \left(\frac{17}{2} - 7e^{-1}\right)x + 7e^{x-2} + \frac{1}{6}.$$

案例 2: 求解微分方程组
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y + 3z \\ \frac{dy}{dt} = 4x - 5y + 3z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - 4y + 2z \end{cases}$$
 的通解。

解 利用 Matlab 程序，求得的通解为

$$\begin{cases} x(t) = c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}, \\ y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}, \\ z(t) = c_1 e^{-2t} + c_3 e^{2t}. \end{cases}$$

【学生活动】听讲，有问题可提问。

（三）知识点小结（约 5 分钟）

同学们全体对于进行讨论

(四)理论讲解：微分方程模型的数值解和稳定性分析(约 30 分钟)

【教师活动】 讲授微分方程模型的数值解和稳定性分析。

知识点 3:微分方程模型的数值解;

知识点 4: 微分方程模型的稳定性分析;

案例 1: (种群竞争问题)有甲乙两个种群, 他们之间为竞争关系,

在 t 时刻两种群的数量可以分别表示为:

$$\text{甲: } x_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

$$\text{乙: } x_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

其中 r_1 、 r_2 分别表示种群甲、乙的固有增长率, N_1 、 N_2 分别表示

环境资源容许的种群最大数量, σ_1 (σ_2) 表示单位数量乙

(甲) 消耗的供养甲(乙)的食物量为单位数量甲(乙)消耗的供养甲

(乙)的食物量的 σ_1 (σ_2) 倍。

选取 $r_1=2.5$, $r_2=1.8$, $N_1=1.6$, $N_2=1$, $x_1(0)=0.1$, $x_2(0)=$

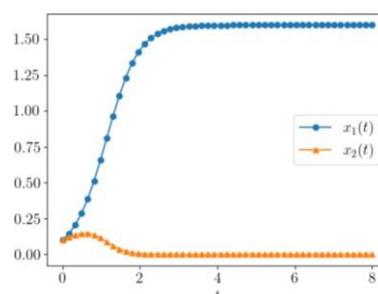
0.1, 求当

(1) $\sigma_1=0.25$, $\sigma_2=4$

(2) $\sigma_1=4$, $\sigma_2=0.25$

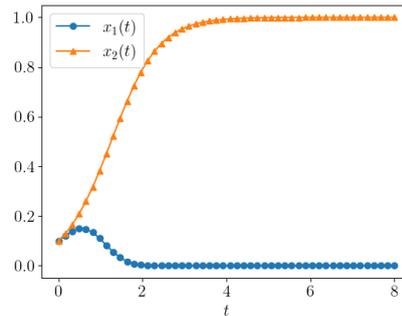
两种情况下的数值解。

解: (1) 编写 Matlab 程序, 可得如下图形结果:



分析结果，我们可知，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x_1(t) \rightarrow 1.6$ ， $x_2(t) \rightarrow 0$ ，即甲种群数量会稳定在环境容许的最大数量，乙种群最终灭绝。

(2) 当我们取定 $\sigma_1 = 4 > 1$ ， $\sigma_2 = 0.25 < 1$ ， $r_1 = 2.5$ ， $r_2 = 1.8$ ， $N_1 = 1.6$ ， $N_2 = 1$ ，最终的平衡点应该为 $(0, N_2) = (0, 1)$ ，替换以上程序中的 σ_1 、 σ_2 的值，得到以下图形：



分析结果，我们可知，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $x_2(t) \rightarrow 1 = N_2$ ， $x_1(t) \rightarrow 0$ 。

案例2: (捕鱼业的持续收获问题)渔业资源是一种再生资源，要保持可持续发展，就要适度开发。考察一个渔场，其中的鱼量在天然环境下按一定规律增长，如果捕捞量恰好等于增长量，那么渔场鱼量将保持不变，这个捕捞量就可以持续，在这里，我们要建立在捕捞情况下渔场鱼量要遵从的数学模型，分析渔场鱼量稳定的条件。由于渔场有其自身的限制，所以我们假设其有最大容量，并认为它与人口的增长模型相似。这样便于模型的假设和建立。

问题提出：研究在捕捞情况下渔场鱼量要遵从的规律，并讨论在可持续捕捞的条件下如何控制捕捞强度，使持续产量达到最大。

基本假定及符号说明：记时刻渔场中鱼量为 x ，关于的自然增长和人工捕捞作如下假设：

(1) 假设在无捕捞条件下的增长服从 Logistic 规律，即：

$$x'(t) = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N} \right)$$

其中 r 是固有增长率， N 是环境容许的最大鱼量， $f(x)$ 表示单位时

	<p>间的增长量。</p> <p>(2) 单位时间的捕捞量（即产量）与渔场鱼量 $x(t)$ 成正比，比例常数 k 表示单位时间的捕捞率，k 可进一步表示为 E，其为捕捞强度，用可以控制的参数如出海渔船数量、渔船的规模、渔网的规格等来度量。</p> <p>建模分析：单位时间内渔场鱼量的变化=自然增长量-捕捞量</p> <p>模型建立：此时，在捕捞情况下渔场鱼量满足的方程为</p> $x'(t) = f(x) = rx \left(1 - \frac{x}{N} \right) - Ex \quad :$ <p>【学生活动】听讲，有问题可提问。</p> <p>【设计意图】从学生通常有切身体会的实际问题出发，更能提高学生的学习兴趣，在问题解决后也能得到更多的收获感。</p> <p>(五) 知识点小结 (10 分钟)</p> <p>【教师活动】在实际的微分方程建模过程中，也往往是上述方法的综合应用。不论应用哪种方法，通常要根据实际情况，作出一定的假设与简化，并要把模型的理论或计算结果与实际情况进行对照验证，以修改模型使之更准确地描述实际问题并进而达到预测预报的目的。</p> <p>(七) 课堂总结 (5 分钟)</p> <p>总结本次课的教学内容：</p> <p>1() : 微分方程模型求解的方法；</p> <p>2() : 微分方程模型的稳定性分析；</p>
课后作业	学生课下寻找生活中跟数学模型有关的小案例，进行分析。

教学内容	第三节 微分方程建模案例 第四节 思考与练习
教学目标	<p>知识目标： 了解微分方程模型的应用背景；理解微分方程模型求解的方法和原理，针对微分方程模型具体实际案例进行实际建模演练，最后展开大讨论。</p> <p>能力目标： 通过实例演示、问题驱动等方式激发学生学习的积极性，通过观察对比、学生交流、师生交流、小组探究等多种形式，培养学生的逻辑思维能力、分析判断能力、和解决问题能力。</p> <p>素质目标： 培养学生敢于质疑、善于分析、勇于创新的精神；培养学生的自主学习意识和团队协作精神；培养学生脚踏实地、不畏艰辛、锲而不舍的精神。</p>
授课学时	2 学时
教学重点	具体实际案例进行建模过程的掌握
教学难点	数学建模中的微分方程模型方法及求解的选取技巧
教学方法	采用问题驱动法、案例演示法、启发式讲授法及自主学习法相结合，以教师的讲解为主，学生的课堂报告、分组讨论为辅，充分调动学生学习的主动性和思考问题的积极性。
教学手段	以课堂讲授为主，主要是多媒体课件和板书相结合的形式。同时借助在线资源，如慕课、雨课堂等平台。
教学过程	<p>根据本次课内容分为若干教学节段，每个节段里，说明教师活动，学生活动，设计意图等模块。</p> <p>在教学的过程中以案例教学贯穿始终，完整地展示提出问题、分析问题、解决问题的建模过程。以引导为主，注重学生自主学习。</p> <p>(一) 课堂引入：通过实际案例：艾滋病无疑是现代历史上最严重的瘟疫。从 1981 年发现以来的 20 多年间，它已经吞噬了近</p>

3000 万人的生命，2004 年有 490 万人被艾滋病毒感染，同时有 300 多万艾滋病患者死亡。尤其可虑的是，全世界约 95% 的艾滋病患者来自防治能力薄弱的发展中国家，如非洲、南亚、东南亚、中美洲等地。在我国，2005 年的疫情评。结果显示，艾滋病毒感染者和艾滋病人约 65 万，疫情仍呈上升趋势，新发生的感染以注射吸毒和性传播为主，发病和死亡依然严重；疫情由高危人群向一般人群扩散；存在疫情进一步蔓延的危险。未来我国艾滋病的流行是趋向平稳还是快速增长，取决于能否大面积地积极开展艾滋病预防活动，以及提供有效的治疗进行课堂引入（约 10 分钟）

【教师活动】对实际案例进行问题分析和知识点的架构；

【学生活动】自由讨论问题需要的参数量和处理方法；

【设计意图】由学生熟悉的内容引入新课，有利于引发学生的认知热情，提高探究新知的兴趣。

（二）理论讲解：在引入的基础上，给出对应的参数和初步模型的建立与求解（约 30 分钟）

【教师活动】通过总结与分析课堂引入的内容，给出对应的参数和初步模型的建立与求解。

知识点 1: 艾滋病发展模型(一)，将研究对象确定为 $CD4^*T$ 细胞(以下简称 T 细胞)和 HIV 的浓度，T 细胞分为未被 HIV 感染的和已被 HIV 感染的两种；

知识点 2: 艾滋病发展模型(二)，免疫学上，区分处于潜伏期的被感染 T 细胞与处于活性期的被感染 T 细胞是很重要的，因为只有后者才会被病毒裂解、复制成新的病毒；

【学生活动】听讲，有问题可提问。

（三）大讨论：艾滋病两种发展模型不同之处的大讨论（约 5 分钟）

（四）思考与练习：采用教材本节给出课后练习，同学们自主选

取题目进行练习（25 分钟）

	<p>【教师活动】 同学们自主选取题目进行练习时，根据同学们提出的问题单独答疑和讨论。</p> <p>【学生活动】 自主选取题目进行练习。</p> <p>【设计意图】 从学生通常有切身体会的实际问题出发，更能提高学生的学习兴趣，在问题解决后也能得到更多的收获感。</p> <p>(五) 选取 2-5 名同学讲解 (15 分钟)</p> <p>【教师活动】 根据同学们选取题目的不同，选取 2-5 名同学现场解答，并提出自己对于插值与拟合的理解和疑惑点</p> <p>(六) 本章小结 (5 分钟)</p> <p>总结本次课的教学内容：</p> <p>1()：微分方程模型建模方法在实际案例里的不同用法；</p> <p>2()：微分方程模型的求解；</p>
课后作业	对于本章的知识点、难点重新梳理，写出小结.

