

ISSN 1008-1399
CN61-1315/O1

- 国家自然科学基金委员会数学天元基金支持刊物
- 《中国期刊网》、《中国学术期刊》(光盘版)全文收录期刊
- 《中国学术期刊综合评价数据库》来源期刊
- 《万方数据-数字化期刊群》、《中文科技期刊数据库》全文收录期刊
- 《中国核心期刊(遴选)数据库》收录期刊
- 《CEPS思博网-中文电子期刊服务》收录期刊
- 《中国数学文摘》、《中国数学文献数据库》收录期刊
- 2000年获“陕西省优秀科技期刊一等奖”
- 国家新闻出版广电总局第一批认定学术期刊



高等数学研究

陈青身题

GAODENG SHUXUE YANJIU
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS



2019 1

ISSN 1008-1399



9 771008 139191

第22卷 第1期 (总第189期)
2019年1月出版

西北工业大学 陕西省数学会 主办

第 22 卷 第 1 期
(总第 189 期)
2019 年 1 月出版
(1954 年创刊)
国内外公开发行

主管: 陕西省科学技术协会
主办: 西北工业大学 陕西省数学会

编委会主编: 崔俊芝
副主编: 徐伟
常务编委: (按姓氏笔画为序)
王国正 王金金 刘三阳 陆全
林伟 赵小艳 赵彦晖 聂玉峰
徐伟 徐文雄 崔俊芝

名誉顾问: 张肇炽

编辑部
主任: 徐伟
常务副主任: 林伟
成员: 徐伟 林伟 王群
吕全义 吴志坚(美)
童增祥(美)

编辑出版: 高等数学研究编辑部
地址: 西安市西北工业大学
邮编: 710072
电话/传真: 86-29-88491574
投稿邮箱: gdsxyj@yeah.net
gdsxyj@nwpu.edu.cn
业务信箱: gdsxyj@126.com

印刷装订: 西安昆明印刷厂
邮发代号: 52-192
国外代号: BM2987
国内总发行: 中国邮政集团公司
陕西省报刊发行局
国外总发行: 中国国际图书贸易总公司
ISSN 1008-1399
CN 61-1315/O1

国内定价: ¥20.00 元
国外定价: \$ 20.00 元

目次

专题研究	
微积分之前可以做什么	林群, 张景中 (001)
卡普利加 (Kaprekar) 数的构造和推广	李长明 (016)
探讨与研究	
帕累托分布抽样基本定理及在帕累托分布参数估计中的应用	李国安 (026)
一类新的二参数二元混合型指数分布的参数估计及相关结构	李国安 (030)
双参数指数截尾分布参数估计相合性的证明	李斐, 吕文, 李琴 (034)
两个与高阶积分有关的 Laplace 变换公式的证明	戴志敏, 张襄松 (036)
推广与应用	
关于一道硕士研究生入学试题的一些思考	张国铭 (039)
单叶双曲面直母线的一般形式	李小斌, 朱佑彬 (042)
埃尔朗分布的有关特性	黄超 (045)
最小二乘法的多角度分析及其在应用	曹宏举, 郭巧丽 (047)
利用特征值和特征向量求解赌徒输光问题	吴慧卓, 张改英, 齐雪林 (050)
从几道例题看 Jordan 标准形的在解题中的应用	卢丹诚 (053)
线性规划的对偶理论在图解法中的应用	卢楠, 孟红云, 刘三阳 (056)
方法与技巧	
求 Hermite 型插值的广义 Lagrange 基函数方法	程世龙, 袁占斌, 聂玉峰 (058)
巧用构造法解线性代数题	王勇茂 (060)
Cramer 规则的几种证明方法	王转德, 李厚彪, 高中喜, 刘福体 (062)
从一道线性代数试题的几种证明方法谈起	王转德, 李厚彪, 高中喜, 刘福体 (065)
Laplace 积分的几种计算方法	罗芳, 陈慧琴 (068)
数模天地	
全基因组 SNP 交互作用中的基因型差异分析	张胜利, 王华依, 柴源君, 葛江诚 (073)
辅导篇	
AR (2) 模型自相关函数计算公式的回顾	王红军, 许少华 (077)
关于独立性的若干反例	朱德刚, 何念念, 陈仕荣 (079)
波动引理的三个证明	龙志文 (081)
中间导数的有界性与极限	徐景实 (084)
学生园地	
借助二项式系数求解行列式	田心 (086)
关于马氏链在常返态下定理的一个新的证明	孙维霞, 杨卫国 (090)
关于随机变量积分的一个命题	闵帆, 杨卫国 (092)
教学随议	
典型随机动力系统的联合与边缘、条件概率密度的形态分析	谢文贤, 唐业宁, 蔡力, 林伟 (094)
从英文原词解析线性代数术语	王继强 (098)
高等数学教学结构研究——以“定积分的应用之旋转体的体积”为例	黄燕平 (100)
Taylor 公式课堂教学的设计与探索	尹小艳, 杨丹丹, 刘建强 (106)
以功效函数为主线的假设检验教学	魏立力, 房彦兵 (110)
数学建模在概率论与数理统计教学中的应用	王泽龙, 朱炬波, 刘吉英 (115)
图解常用离散型随机变量	杨筱菡 (118)
凸函数课堂教学设计	孟红云 (121)
从两道例题看高等数学知识的前后贯通	李宜阳 (124)
积分的整体性	吕中学 (126)
简讯	
优选法	(072)
集合论: 现代数学的共同基础	(083)
2018 年度国家科学技术奖	(105)
2018 年西北工业大学数学教学成果显著	(105)

双参数指数截尾分布参数估计相合性的证明

李斐, 吕文, 李琴

(烟台大学 数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

摘要 给出了双参数指数分布截尾寿命试验样本的联合分布, 得到了参数的极大似然估计, 并证明了该估计的相合性.

关键词 双参数指数分布; 截尾寿命试验; 相合性; 平均寿命

中图分类号 O212.1 文献标识码 A 文章编号 1008-1399(2019)01-0034-02

Consistent Estimations of Two-parameter Exponential Distribution under Censoring Life Test

LI Fei, LV Wen, and LI Qin

(School of Mathematics and Information Science, Yantai University, Yantai 264005)

Abstract This paper derives the joint distribution of the sample of the two-parameter exponential distribution under the censoring life test. The parameter's MLEs are obtained and their consistencies are proved.

Keywords two-parameter exponential distribution, censoring life test, consistent estimation, mean life

1 引言

随机变量 X 服从双参数指数分布 $e(\lambda, \mu)$, 其密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda(x-\mu)}, \quad x > \mu$$

文献[1]给出了单参数指数分布族的定数截尾寿命样本的分布, 及平均寿命 $\theta = \lambda^{-1}$ 的估计和该估计的优良性. 文献[2]给出了双参数指数分布截尾寿命试验平均寿命 θ, μ 的无偏估计. 本文给出了 θ, μ 的极大似然估计, 并证明了该估计的相合性. 关于双参数指数分布的其它统计推断结果可见文献[3-6].

2 两参数指数截尾分布的参数估计

设总体 X 服从两参数指数分布 $e(\lambda, \mu)$, X_1, \dots, X_n 为取自该总体的一个容量为 n 的样本.

考虑定数截尾寿命试验, 则 $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ 为该分布的样本, 其中 $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ 为 X_1, \dots, X_n 的前 r 位的次序统计量. 利用文献[2]中求次序统计量分布的方法, 不难得到 $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ 的分布如下,

引理 1 若总体 X 服从两参数指数分布 $e(\lambda, \mu)$, 其定数截尾寿命试验样本 $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ 的联合密度函数如下:

$$f_r(x_1, \dots, x_r) = P_n \lambda^r e^{n\lambda\mu} e^{-\lambda(\sum_{i=1}^r x_i + (n-r)x_r)}, \quad \mu \leq x_1 \leq \dots \leq x_r. \quad (1)$$

由因子分解定理, 不难得到如下推论,

推论 2 $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ 为两参数指数分布 $e(\lambda, \mu)$ 的定数截尾寿命试验样本, 则 (λ, μ) 的充分统计量为 (T_1, T_2) , 其中

$$T_1 = X_{(1)}, T_2 = \sum_{i=1}^r X_{(i)} + (n-r)X_{(r)}. \quad (2)$$

利用极大似然方法, 可求得 (λ, μ) 的极大似然估计为

$$\hat{\mu} = X_{(1)}, \hat{\lambda} = r \left(\sum_{i=1}^r X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} - nX_{(1)} \right)^{-1},$$

则平均寿命 $\theta = \lambda^{-1}$ 的极大似然估计为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^r X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} - nX_{(1)} \right) \quad (3)$$

收稿日期: 2017-10-28 修改日期: 2017-12-10

基金项目: 国家自然科学基金(61503318, 11371029, 71672166), 山东省高校科研计划项目(J13LI06).

作者简介: 李斐(1982-), 女, 山东烟台, 博士, 讲师, 研究方向多元统计分析, Email: feili@ytu.edu.cn.

3 $\hat{\mu}, \hat{\theta}$ 相合性的证明

定理 3 $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ 为两参数指数分布 $e(\lambda, \mu)$ 的定数截尾寿命试验样本, 记 $Z_1 = nX_{(1)}, Z_r =$

$\sum_{i=1}^r X_{(i)} + (n-r)X_{(r)}$, 则 Z_1, Z_r 相互独立, 且有

$$Z_1 \sim e(\lambda, n\mu), Z_r \sim Ga(r-1, \lambda).$$

证明 令

$$\begin{aligned} Y_1 &= nX_{(1)} \\ Y_2 &= (n-1)(X_{(2)} - X_{(1)}) \\ &\dots \end{aligned} \tag{4}$$

$$Y_r = (n-r+1)(X_{(r)} - X_{(r-1)})$$

则该变换的 Jacobi 行列式 $J(Y \rightarrow X) = A_n^r$, 可得到 Y_1, \dots, Y_r 的联合密度函数如下,

$$\begin{aligned} f_r(y_1, \dots, y_r) &= \lambda^r e^{n\mu} e^{-\lambda(y_1 + \dots + y_r)}, \\ y_1 &\geq n\mu, y_2, \dots, y_r \geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

令

$$\begin{aligned} Z_1 &= Y_1, Z_2 = Y_2, Z_3 = Y_2 + Y_3 \\ &\dots \\ Z_r &= Y_2 + \dots + Y_r \end{aligned} \tag{6}$$

则 Z_1, \dots, Z_r 的联合密度函数为,

$$\begin{aligned} f_r(z_1, \dots, z_r) &= \lambda^r e^{n\mu} e^{-\lambda(z_1 + z_r)}, \\ z_1 &\geq n\mu, 0 \leq z_2 \leq \dots \leq z_r. \end{aligned}$$

对 z_2, \dots, z_{r-1} 积分, 注意到 Z_2, \dots, Z_{r-1} 应为 $r-2$ 个独立同分布的 $(0, z_r)$ 上的均匀分布变量的次序统计量, 故 Z_1, Z_r 的联合密度函数为

$$f(z_1, z_r) = \frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r-1)} z_r^{r-2} e^{-\lambda z_r} \lambda e^{-\lambda(z_1 - n\mu)}, z_1 \geq n\mu, z_r \geq 0.$$

可见 $Z_r \sim Ga(r-1, \lambda), Z_1 \sim e(\lambda, n\mu)$.

推论 4 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计.

证明 由变换 (4), (6) 得,

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= \frac{1}{r} \left(\sum_{i=1}^r X_{(i)} + (n-r)X_{(r)} - nX_{(1)} \right) \\ &= \frac{1}{r} (Y_2 + \dots + Y_r) \end{aligned}$$

由 (5) 式, 及 Z_1 的分布知, Y_2, \dots, Y_r 独立同分布, 均服从 $e(\lambda)$ 的指数分布. 故由大数定律得,

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \quad (r \rightarrow \infty).$$

推论 5 $\hat{\mu}$ 为 μ 的相合估计.

证明 由变换 (4), (6) 得, $\hat{\mu} = X_{(1)} = \frac{1}{n}Z_1$, 而

$Z_1 \sim e(\lambda, n\mu)$, 不难得到

$$E\hat{\mu} = \mu + \frac{1}{n\lambda}, D\hat{\mu} = \frac{1}{n^2\lambda^2}.$$

由切贝晓夫不等式, 得

$$P\left(|\hat{\mu} - \left(\mu + \frac{1}{n\lambda}\right)| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{n^2\lambda^2\epsilon^2}$$

故 $\hat{\mu} \xrightarrow{P} \mu \quad (n \rightarrow \infty)$.

4 模拟结果

设总体 X 服从两参数指数分布 $e(0.1, 2)$, X_1, \dots, X_n 为取自该总体的一个容量为 n 的样本. $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ 为其前 r 个次序统计量, 对以下几种情况进行了模拟计算 (表 1). 不难看出, $\hat{\mu}, \hat{\theta}$ 分别为 μ, θ 的相合估计, 且 $\hat{\mu}$ 的收敛速度要快于 $\hat{\theta}$

图 1 为 $n = 5000, 10000$ 时 $\hat{\theta}$ 的值, 可以看出随着 r 的增大, $\hat{\theta}$ 收敛于 θ . 且当 r 较小时, 估计值存在一定的偏差, 这是因为 $\hat{\theta}$ 并不是 θ 的无偏估计, 而是渐进无偏估计.

表 1 $e(0.1, 2)$ 不同情况下估计的比较

分布	$n = 100$	$n = 100$	$n = 1\,000$	$n = 1\,0000$
	$r = 50$	$r = 80$	$r = 800$	$r = 8000$
$\hat{\mu}$	2.22	2.22	2.00	2.00
$\hat{\theta}$	9.31	9.68	9.58	9.998

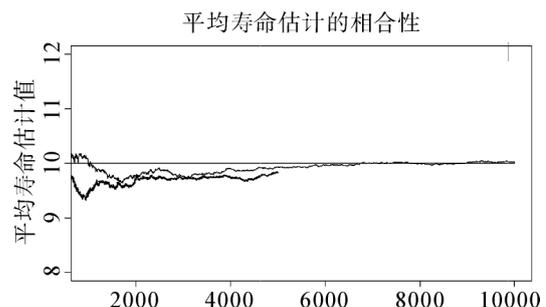


图 1 $n = 5\,000, 10\,000$ 时 $\hat{\theta}$ 的值

参考文献

- [1] 茆诗松, 汤银才等. 非参数统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [2] 茆诗松, 王静龙等. 高等数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [3] 李云飞, 黄继伟, 朱宏. 双参数指数分布异常数据的检验[J]. 电子科技大学学报, 2005, 34(1): 127-130.
- [4] 王黎明, 金衍. 双参数指数分布参数的假设检验[J]. 内蒙古师大学报(自然科学版), 1996, 4(4): 9-13.
- [5] 林金官. 双参数指数分布位置参数的统计推断[J]. 工科学, 2000, 16(2): 35-39.
- [6] 丁晓, 韦来生. 双指数分布位置参数的经验 Bayes 估计问题[J]. 数学杂志, 2005, 25(4): 413-420.

热忱欢迎订阅2019年《高等数学研究》

高校、科研院所图书馆、资料室必备参考资料, 数学教师科研、教学的得力助手, 大学生学习数学的良师益友

《高等数学研究》是西北工业大学和陕西省数学会联合主办的以高校教师、大学生和科技工作者为主要的服务对象、国内外公开发行的数学期刊, 是1950年初期我国创办的几份数学杂志之一, 2014年国家新闻出版广电总局第一批认定的学术期刊。多年来, 刊物深受读者喜爱, 得到了关心数学教育的众多数学家、数学教育家、广大数学教育工作者的关心和支持, 在此谨向热情关爱支持本刊的专家、学者和广大作者、读者表示衷心的感谢和敬意!

本刊为双月刊, A4开本, 单月月底出版。2019年第2, 3, 5, 6期各64页, 定价9.0元; 第1, 4期各128页, 定价20元。全年6期总定价76元。一、二年级大学生读者, 可以只订阅其中与高等数学、线性代数、概率统计课程内容密切相关的4期, 即2019年第2, 3, 5, 6期, 共价36元。

订阅方式:

(1) 可以在全国各地邮局订阅, 邮发代号: 52-192。

(2) 直接汇款至本刊编辑部订阅。

近若干年的部分期刊尚有少量存量, 如有需要可直接与编辑部联系购买(含邮购)。

Studies in College Mathematics

(Bimonthly, Started in 1954)

Vol. 22, No. 1 (Serial No. 189), Jan. 2019

Sponsored by Northwestern Polytechnical University and Shaanxi Mathematical Society

Edited and published by Editorial Board of Studies in College Mathematics

(Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, PRC)

Editor-in-Chief CUI Junzhi

Printed by Xi'an Kunming Printing House

Distributed by China International Book Trading Corporation

(P. O. Box 399, Beijing 100044, PRC)

CN 61-1315/O1/ISSN1008-1399

投稿专用信箱: gdsxyj@yeah.net

邮发代号: 52-192

国内定价: 20.00元