

东北师范大学 主管

吉林省数学会 主办

中国期刊全文数据库 (CJFD) 收录期刊

国际标准连续出版物号: ISSN 1007-872X

国内统一连续出版物号: CN 22-1217/O1

SHUXUE
XUEXI
YU YANJIU

数学学习与研究

数学学习与研究

2020.28

2020.28

邮发代号: 12-377



NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NNEUP.COM

东北师范大学出版社

东北师范大学出版社

数学学习与研究

SHUXUE XUEXI YU YANJIU

旬刊

2020年第28期 2020年12月25日出版

目次

高教视野 GAOJIAO SHIYE

打造线性代数金课的探索与实践	/陈荣三 马晴霞	2
复合函数在一点的极限与连续性的解析	/吕胜利 李静铂	4
高等数学微课教学设计研究 ——以“复合函数的求导法则”为例	/申盼盼	6
互联网思维对职业教育数学教学的影响与教学模式探索	/谢晓霞	8
关于无限域和有限域的几点差异注记	/杨润芝 赵旭波 李小平	10
基于学习通平台应用统计学课程教学模式初探	/殷倩	12
基于“引—学—练”模式下的高职数学混合式教学设计 ——以参数方程求导为例	/詹鸿 黄慎	14
高等数学课程考核内容与方式多元化评价模式的研究 ——以南京工业大学浦江学院为例	/周海青	16
基本初等函数趋于0或无穷的速度及其应用	/龚荣芳 蒋建林	18
数学建模在高等数学教学中的应用案例研究	/李清华 王旭	22
高职数学函数极限概念教学的实践与认识	/袁立新	24
Sup-T合成方程的极小解的判别与构造	/张迪 周艳红 付航	27
寓教于乐 润物无声 ——例谈线性代数教学中课程思政的实施	/张启明 徐承杰 汤琼 肖海青 刘东南	29

教学方法 JIAOXUE FANGFA

分类讨论思想及其在高中数学教学中的应用	/赵玉才	32
初中数学互动教学的策略探究	/鲍威	34
初中数学教学中落实“减负增效”的有效性探究	/韩士龙	36
用一般观念引领平行四边形复习的整体教学	/蒋智慧	38
直击思维过程,培养思维能力 ——探索初中数学教学中培养学生思维能力的有效策略	/李玉福	40
谈小学数学教学中学生计算能力的培养	/梁滢	42
初中生数学阅读能力培养的教学策略	/陆远坤	44
合理分层,有效课堂 ——初中数学教学中分层教学法的应用	/袁春英	46

主任 史宁中
编委 高 夯 马云鹏 王尚志
张奠宙 沈呈民 孔凡哲
王继延 熊 斌 关成志
景 敏 孟祥静 崔安玲
郭清波 刘 璇 欧阳新龙
孙孝武 孙延洲 晁振英
郭奕津 张文昌

社 长 吴长安
主 编 陈国良
副 主 编 袁赵洪
责任编辑 姜鸿飞 赵彦翔 曹秋园
李 丹 吴应明 杨英杰

美术设计 隋福成
发行主管 吕雪冬 程家强 李天甲
主 管 东北师范大学
主 办 吉林省数学会
东北师范大学数学与统计学院

出 版 数学学习与研究杂志社
地 址 长春市净月开发区金宝街118号
邮 编 130117
电 话 (0431) 84568133 (赵彦翔)
(0431) 84568090 (曹秋园)
(0431) 85601108 (姜鸿飞)
(0431) 84568086 (袁赵洪)

传 真 (0431) 85693386

网 址 www.nenup.com

E-mail sxxlw@163.com

印 刷 长春市宏达印务有限公司

邮发代号 12-377

国内统一刊号 CN 22-1217/01

国际标准刊号 ISSN 1007-872X

广告许可证号 2200004000103

定 价 32.00元

本刊全文数据提供给以下网站:

中国知网 www.cnki.net

博 看 网 www.bookan.com.cn

龙源期刊网 www.qikan.com www.qikan.com.cn

本刊来稿凡经使用,如无电子版方面的特殊表明,即视作同意上网传播,特此通告。

初中数学反思型教学在复习课中的实践与思考	/郑隽	48
活动中积累经验,实践中发展能力	/周唯	50
“导学互动”教学模式对初中数学有效教学的影响	/林佳丽	52
初中数学作业中实行创造性思维能力训练的措施分析	/周兆忠	55
小学数学教学中数形结合思想的应用思考	/豆雪琳	58
指向高阶思维发展的数学深度学习		
——以苏教版五年级下册“因数和倍数”教学为例	/金怡婷	60
发现:给学生一条数学成长的路径		
——例谈小学“发现数学”课堂的教学实施策略	/林晓	62
线上线下培养小学生数学自主学习的能力	/孙露艳	64
小学生数学思维培养策略	/汤长会	66
数学课堂中培养学生学习力的策略研究		
——基于学生选择权利的角度	/薛飞	68
运用整体原理,优化问题解决教学	/叶奉慈	70
浅析初中数学教学中如何发展几何直观	/戴梦瑶	72
巧用思维导图提高小学高年级数学复习效率	/陈海霞	74
小学数学“生活化教学”的基本策略	/王彦梅	76

案例剖析 ANLI POUXI

先学后教 以辩代教		
——人教版三上“分数的初步认识”教学实践与思考		
	/潘李锋	78
浅谈高中数学高效课堂的引入环节——“创设情境”	/徐请杰	80
基于“四基”的“平方差公式”的教学设计		
	/张美琳 王良伟 陈仿	82
基于初中数学数形结合思想教学研究与案例分析	/吴若林	85
将画图策略进行到底		
——以“归一问题”教学为例	/高晓曼	87
突破“藩篱”,提升数学课的“三度”		
——以北师大版四年级“温度”教学为例	/郝高峰	89

数学核心素养 SHUXUE HEXIN SUYANG

在信息技术与课程深度融合中提升数学核心素养	/马中明	91
试论核心素养背景下高中数学信息化教学	/王东	93
基于核心素养导向下高中数学运算能力的培养	/徐杰霞	95
核心素养下数学建模思想在解高考数学题中的应用研究		
	/张双平	97
基于核心素养的初中数学分层教学分析	/董永同	99
核心素养下初中数学分层教学的探讨	/杭茜	101
基于学科核心素养的初中数学学习题设计		
——以“统计概率”为例	/黄菁菁	103
如何把核心素养教育融合到数学课堂	/吴婉萍	105
基于核心素养下的小学数学课堂有效提问的研究	/郭婷婷	107
核心素养视角下小学数学绘本教学研究	/俞波	109

课改前沿 KEGAI QIANYAN

巧借“微”风吹开数学知识的大门		
——刍议高中数学课堂中微课的合理运用	/杨建华	111
基于新课标下中职数学教学中中学生创新能力的培养策略		
	/王锡荣	113
分层教学在中职数学教学中的应用分析	/李英红	115
初中数学未来分享学习模式研究	/周文纪	117
初中数学概念教学中的“变式教学”方案探究	/胡少华	119
新课程下基于初中数学折叠问题的教学思考	/焦鸥	121
新课程下初中数学前置作业的设计研究	/张恒	123
微课在小学数学科教学中应用的实践研究	/包欣欣	125
开展体验教学		
——创设情境提升小学数学教学效率	/王文治	127

数学教育 SHUXUE JIAOYU

以史明思,用史养性		
——浅谈利用数学史培养高中生数学学科核心素养		
	/王晓 张毅	129
让社会主义核心价值观走进数学课堂		
——《圆的认识》教学设计与反思	/张雅芬	131

解题技巧与方法 JIETI JIQIAO YU FANGFA

解决含参数问题的三把利剑	/王中华	134
“当”字型问题的解题逻辑	/段雄东	136
解析根的判别式在数学竞赛中的应用	/柳汉伟	138

专题研究 ZHUANTI YANJIU

苏州建筑文化融入初中数学课堂的教学尝试		
——以苏科版《丰富的图形世界》为例	/单净璇 张惠珍	140
超几何分布、二项分布与正态分布的区别与联系		
	/郭婧 李强	142
数学方法在计算全要素生产率中的应用	/张文哲 余玲玲	144
欧拉线的证明方法		
——从德萨格定理入手	/张柱 马晓霜	146
基于模糊二级综合评价法的乐山市道路交通安全设施评价		
	/陈丽羽 余婷 李星怡 梅杨 勾承俐	148
PBL教学模式的运用在高中数学教学中的困境与突破		
——以《任意角的三角函数》为例	/戴梦玮 吴晓红	151
有向线段定比分点的一条性质及应用	/潘继军	153

交流平台 JIAOLIU PINGTAI

初中数学课堂教学有效性探究	/裘亚华	156
初中数学课堂教学提质增效的方法管见	/武燕红	158
点击思维过程,下载思维模式		
——浅谈小学数学高年段数学思维能力提升	/黄春文	160

数学建模在高等数学教学中的应用案例研究

◎李清华 王旭 (烟台大学数学与信息科学学院, 山东 烟台 264005)

【摘要】引入数学建模是高等数学教学的有效方式. 本文以返券销售系统设计为案例, 通过构造消费效用函数和利润函数设计最优策略模型, 利用高等数学中的积分和偏导运算解决实际问题. 教学设计引入数学模型对学生理解和应用高等数学具有积极作用.

【关键词】数学建模; 高等数学; 效用函数; 利润函数

【基金项目】2018年度山东省本科教改重点项目“新工科背景下线性代数教学改革的研究与实践”(编号: Z2018S049).

1 引言

高等数学是现代各个学科知识的理论基础, 其教学过程中无处不体现着数学建模的思维方法. 极限、微积分、连续和微分方程等数学思想, 以及待定系数法、最小二乘法、连续离散化等数学方法都蕴含了数学模型的建构. 数学建模可以在抽象问题和实际问题之间建立联系. 在高等数学的教学过程中可以通过引入数学建模的内容和思维方法分析实际问题, 提升学生的数学建模意识和学习动力. 本文以经济生活中的返券促销现象实施数学模型的应用教学.

2 返券系统设计

某商店采用“返券”优惠促销, 当消费者消费金额满100元时, 该店可赠送50元的“返券”. 不足100元的部分不能获得返券. 返券的用法是: 每消费100元的商品, 可以使用该店的50元返券. 在付款时可以抵消50元, 不足100元的部分忽略不计.

根据这个问题可以进行延拓, 进一步考虑商家如何设计返券, 从而获得最大利润. 首先对符号进行说明.

表 符号说明

符号	含义
ω	消费者实际消费小于等于预期消费时, 每单位一消费金额的效用 $\omega > 1$
α	消费者实际消费大于预期消费时, 提高单位一消费金额的边际效用 $\alpha < 1$
x	消费者预期消费均值
Y_1	得到返券至少消费的金额(返券点)
Y_2	使用返券至少消费的金额(用券点)
Γ	返券面值
U	商家效用
V	商家净效用

2.1 消费者的消费行为

将消费者的消费行为分为两个阶段, 第一个阶段是消费者第一次消费得到返券, 第二个阶段是消费者使用返券进行抵扣消费. 当消费者自我感觉最为划算的时候效用达到最大. 消费者对若干消费品的选择, 在达到每一种消费品的单位货币支付所得的边际效用相等时, 实现最大总效用, 即称之为效用最大化原则^[1].

假设商家在没有使用返券促销活动的情况下, 消费者在两个阶段均按照自己的预期消费金额进行消费, 设两次预期消费金额的均值为 x . 当商家使用返券活动时, 在第一个阶段, 当消费者消费金额大于等于 Y_1 时即可以得到价值 Γ 的返券, 但是该返券并不能用于第一个阶段的消费, 只能用于第二个阶段消费抵扣. 在第二个阶段, 即返券使用时期, 当消费金额大于等于 Y_2 时, 消费者就可以使用返券来抵扣本次消费, 如果消费小于 Y 则不能使用该返券.

为更好地刻画消费者的行为, 构建消费者消费的效用函数^[2]如下:

$$U(k) = \begin{cases} \omega s, & s \leq x \\ \omega s + \alpha(s-x)^2, & s > x \end{cases}$$

其中 x 为消费者最佳的预期消费金额, s 为实际的消费金额; ω 是消费者实际消费金额小于等于预期消费金额时, 每单位一消费金额的效用值 ($\omega > 1$); α 是消费者实际消费金额大于预期消费金额时, 提高单位一消费金额所得到的边际效用 ($0 < \alpha < 1$). 消费者的净效用是效用与成本之差, 定义消费者消费行为中获得的净效用函数^[3]为:

$$V(k) = \begin{cases} (\omega-1)s, & s \leq x \\ (\omega-1)s + (\alpha-1)(s-x)^2, & s > x \end{cases}$$

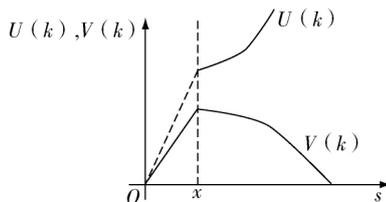


图 商家销售效用及净效用

当 $0 < s < x$, $\omega - 1 > 0$ 表示的是单位一消费金额的净边际效用; 当 $s > x$, $\alpha - 1 < 0$ 表示的是单位一消费金额的净边际效用. 净效用随着消费者的消费而提高, 当消费者实际消费金额 s 等于预期消费金额 x 时, 净效用显然取得最大值, 当实际消费金额大于 x 时, 净效用减少.

当返券点等于用券点时, 消费者的预期消费一共有两种情况, 一是预期消费金额大于等于返券点和用券点, 二是预期消费金额小于返券点和用券点. 当返券点不等于用券点时, 比第一种情况多了一种预期消费金额介于返券点和用券点之间. 因此一共有三种情况, 在此一一进行讨论.

1. 当消费者预期消费金额大于等于 Y_1 和 Y_2 时, 消费者可直接获得一张返券, 并且在下次消费时也不需要提高预期消费, 可以直接使用返券进行抵扣消费.

2. 当消费者预期消费金额同时小于 Y_1 和 Y_2 时, 且 $Y_1 < Y_2$ 时, 消费者有两种消费方案, 一是提高预期消费达到返券点获得返券并使用返券, 二是不提高预期消费, 维持原消费金额, 消费者需要对这两种情况的效用进行衡量. 这类消费者如果没有参与反券促销活动, 其净效用在预期消费金额时达到最大. 此时消费者如果为了获得返券而提高自己的预期消费, 那么根据净效用函数可以发现他的净效用是降低的. 但是商家会给消费者一张有价值的返券, 如果这张返券

给消费者带来的效用比获得返券而降低的净效用高,那么消费者就会为了获得返券而提高消费;反之,如果这张返券给消费者带来的效用比获得返券而降低的净效用低,那么消费者就不会提高预期消费。

定义返券的实际效用为

$$\Omega = r \cdot \Gamma,$$

其中 r 为返券的使用率。

消费者如果希望通过提高预期消费金额来得到返券,应该满足如下条件:

$$\alpha(Y_1 - x) - (Y_1 - x) + \alpha(Y_2 - r \cdot \Gamma - x) - (Y_2 - r \cdot \Gamma - x) \geq 0.$$

根据公式,可以得到 $x \geq \frac{1}{2} \left(Y_1 + Y_2 + \frac{r \cdot \Gamma}{\alpha - 1} \right)$, 即 $x \in \left[\frac{1}{2} \left(Y_1 + Y_2 + \frac{r \cdot \Gamma}{\alpha - 1} \right), \min(Y_1, Y_2) \right)$ 时,消费者会提高预期消费获得返券。反之,当 $x \in \left(0, \frac{1}{2} \left(Y_1 + Y_2 + \frac{r \cdot \Gamma}{\alpha - 1} \right) \right)$ 时,消费者则不会提高预期消费来获得返券。

3. 当消费者预期消费介于 Y_1 和 Y_2 时,分为两种情况:

I. 当返券点小于预期消费金额小于用券点,即 $Y_1 < x < Y_2$ 时,消费者可以免费获得返券,但是下一次消费必须提高预期消费才可以使用返券抵扣消费。消费者如果愿意提高消费来使用返券,应该满足如下条件:

$$r \cdot \Gamma + (\alpha - 1)(Y_2 - x)^2 \geq 0,$$

根据公式,可以解得 $x \geq Y_2 - \sqrt{\frac{r \cdot \Gamma}{1 - \alpha}}$ 。因此,当预期消费金额在 $\left[Y_1, Y_2 - \sqrt{\frac{r \cdot \Gamma}{1 - \alpha}} \right)$ 时,消费者可以得到返券而且不需要提高预期消费便可以在第二次消费时使用返券进行抵扣。当预期消费金额在 $\left[Y_2 - \sqrt{\frac{r \cdot \Gamma}{1 - \alpha}}, Y_2 \right)$ 时,消费者会得到返券并且在第二次消费阶段会提高预期消费,进而可以使用返券进行抵扣。

II. 当用券点小于预期消费金额小于返券点,并且预期消费金额在 $\left[Y_2, Y_1 - \sqrt{\frac{r \cdot \Gamma}{1 - \alpha}} \right)$ 时,消费者不会提高预期消费金额来获得返券。预期消费金额在 $\left[Y_1 - \sqrt{\frac{r \cdot \Gamma}{1 - \alpha}}, Y_1 \right)$ 时,消费者会提高预期消费金额从而得到返券,并且第二次消费仍然按照预期消费即可使用返券进行抵扣。

II. 当用券点小于预期消费金额小于返券点,并且预期

消费金额在 $\left[Y_2, Y_1 - \sqrt{\frac{r \cdot \Gamma}{1 - \alpha}} \right)$ 时,消费者不会提高预期消费金额来获得返券。预期消费金额在 $\left[Y_1 - \sqrt{\frac{r \cdot \Gamma}{1 - \alpha}}, Y_1 \right)$ 时,消费者会提高预期消费金额从而得到返券,并且第二次消费仍然按照预期消费即可使用返券进行抵扣。

2.2 商家利润函数

现在考虑商家的利润,要想研究商家使用返券后的利润情况,需要同未使用返券促销的利润相比较,因此首先考虑未使用返券时商家的盈利模型。

返券促销和其他的促销方式不尽相同,返券促销的对象是在商店中消费达到一定数额的消费者。因此需考虑商店中物品的平均预付资本,即平均进价 C 以及平均售价 P ,则利润可以表示为 $\pi = P - C$ 。利润率是剩余价值和全部的预付资本的比率,利润率是剩余价值率的转化形式。利润率可以考察商家预期利润的完成情况,也可以用于比较不同商家和不同时期的经营管理水平,从而提高经济效益^[4]。用 $A (0 < A < 1)$ 表示商家所销商品的平均利润。

当商家不使用返券促销,此时的利润模型^[4]为:

$$\pi_0 = \int_0^b Ax f(x) dx = AE(x) = \frac{Ab}{2},$$

其中 b 为消费者预期消费的上限。

1. 当 $x < Y_1 < Y_2$ 时,商家的平均利润为

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})} [2 \cdot Ax f(x)] dx + \int_{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})}^{Y_1} [(AY_1 + AY_2 - \Gamma) f(x)] dx.$$

化简可得:

$$W = 2A \int_0^{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})} x f(x) dx + A(Y_1 + Y_2) \int_{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})}^{Y_1} f(x) dx - \Gamma \int_{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})}^{Y_1} f(x) dx.$$

2. 当 $x < Y_2 < Y_1$ 时,商家的平均利润为

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})} [2 \cdot Ax f(x)] dx + \int_{\frac{1}{2}(Y_1+Y_2+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})}^{Y_1} [(AY_1 + AY_2 - \Gamma) f(x)] dx.$$

3. 当 $Y_1 < x < Y_2$ 时,商家的平均利润为:

$$W = \int_{Y_1}^{Y_2 - \sqrt{\frac{r\Gamma}{1-\alpha}}} [2 \cdot Ax f(x)] dx + \int_{Y_2 - \sqrt{\frac{r\Gamma}{1-\alpha}}}^{Y_2} [Ax + AY_2 - \Gamma] f(x) dx.$$

4. 当 $Y_2 < x < Y_1$ 时,商家的平均利润为:

$$W = \int_{Y_2}^{Y_1 - \sqrt{\frac{r\Gamma}{1-\alpha}}} [2 \cdot Ax f(x)] dx + \int_{Y_1 - \sqrt{\frac{r\Gamma}{1-\alpha}}}^{Y_2} [(AY_1 + Ax - \Gamma) f(x)] dx.$$

5. 当 $x \geq Y_2 > Y_1$ 时,商家的平均利润为:

$$W = 2A \int_{Y_2}^b x f(x) dx.$$

6. 当 $x \geq Y_1 > Y_2$ 时,商家的平均利润为:

$$W = 2A \int_{Y_1}^b x f(x) dx.$$

2.3 商家最优策略

现在考虑商家制定返券促销的最优策略模型,在此假设返券点和用券点相同,记 $Y_1 = Y_2 = Y$ 。通过商家利润函数可以得到:

$$W = \int_0^{\frac{1}{2}(2Y+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})} [2 \cdot Ax f(x)] dx + \int_{\frac{1}{2}(2Y+\frac{r\Gamma}{\alpha-1})}^Y [(2AY - \Gamma) f(x)] dx + \int_Y^b [2 \cdot Ax f(x)] dx,$$

为方便计算,设 $\lambda = \frac{r}{2(\alpha - 1)}$,

因此,原式可以化为

$$W = 2A \int_0^{Y+\lambda\Gamma} x f(x) dx + (2AY - \Gamma) \int_{Y+\lambda\Gamma}^Y f(x) dx + 2A \int_Y^b x f(x) dx.$$

令 $\frac{\partial W}{\partial \Gamma} = 0$ 解得

$$A = -\frac{1}{2\lambda}.$$

(下转 26 页)

定义的阅读材料还很缺乏。正如柯朗所言：遗憾的是有些作者故弄玄虚，他们不做充分的准备，而只是把这个定义直接向读者列出，好像作些解释就有损于数学家身份似的^[5]。

四、结束语

从其历史过程看，“历经数千年时间，仍然没有 $\epsilon-\delta$ 的影子，那么要让学生短短数十分钟掌握 ‘ $\epsilon-\delta$ ’ 语言并不是一件容易的事情”^[11]。因此，极限概念的理解与其他许多数学概念一样，需要经历特殊到一般、实践与认识的不反复与深化。另外，虽然极限形式化的定义是为了摆脱对朴素直观的依赖，但在学生头脑中的心理表征并非是相应的形式化定义，所以有必要充分发挥图形图像、数表的教育功能，采用类比、数形结合、一般化或特殊化等方法，借助信息技术手段，创设出与形式化定义相一致的精致直观，使学生产生恰当的概念意象。总之，极限形式化定义是一种普通的静态定义形式，通过精准施策，学生是可以理解的，多年的教学实践也表明了这一点。

【参考文献】

[1] (日) 米山国藏. 数学的精神、思想和方法 [M]. 毛正中, 吴素华, 译. 四川: 四川教育出版社, 1986: 73.

[2] 涂荣豹. 数学教学认识论 [M]. 江苏: 南京师范大学出版社, 2003: 294-301.

[3] 张伟平. 文科学生学习微积分前对无限的认识层次分析 [J]. 数学教育学报, 2006(3): 54-59.

[4] (荷) 弗莱登塔尔. 作为教育任务的数学 [M]. 陈昌平, 唐瑞芬, 等编译. 上海: 上海教育出版社, 1995: 346-349.

[5] (美) R·柯朗, H·罗宾. 什么是数学 [M]. 左平, 张饴慈, 译. 上海: 复旦大学出版社, 2008: 299.

[6] 阴东升, 卞瑞玲, 徐本顺. 数学中的特殊化与一般化 [M]. 江苏: 江苏教育出版社, 1996: 47.

[7] 郑君文, 张恩华. 数学逻辑学概论 [M]. 安徽: 安徽教育出版社, 1995: 202-204.

[8] 张莫宙. 微积分教学: 从冰冷的美丽到火热的思考 [J]. 高等数学研究, 2006(2): 2-4.

[9] 汪晓勤. M·克莱因的数学教育思想与高等数学教学 [J]. 曲阜师范大学学报, 2004(4): 106-110.

[10] (美) G·波利亚. 数学的发现 [M]. 刘景麟, 曹之江, 邹清莲, 译. 北京: 科学出版社, 1981: 158.

[11] 任芬芳, 汪晓琴, 陈玲玲. 美国早期数学教科书中的极限概念 [J]. 数学教育学报, 2017(4): 38-43.

(上接 23 页)

于是可以得到: 当 $0 < A < -\frac{1}{2\lambda}$ 时, $\frac{\partial W}{\partial \Gamma} < 0$, 即 W 关于 Γ 是单调递减的, 由于模型的目的是让商家通过返券促销盈利, 此时商家提供返券促销活动没有任何意义. 此时不设置任何返券时, 商家的利润达到最大, 即 $\Gamma = 0$.

当 $A \geq -\frac{1}{2\lambda}$ 时, 假设消费者的预期消费金额在 $[0, b]$ 上均匀分布, 消费者预期消费函数的概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & 0 < x < b, \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

利润函数可以化简为:

$$\begin{aligned} W &= \frac{2A}{b} \int_0^{Y+\lambda\Gamma} x dx + \left(\frac{2AY - \Gamma}{b} \right) \int_{Y+\lambda\Gamma}^Y dx + \frac{2A}{b} \int_Y^b x dx \\ &= \frac{1}{2} (Y^2 + 2Yr\Gamma + \lambda^2 \Gamma^2) + \frac{1}{b} (2AYr\Gamma - r^2 \Gamma) + \frac{A}{b} (b^2 - Y^2) \\ \frac{\partial W}{\partial Y} &= Y + r\Gamma + \frac{2Ar\Gamma}{b} - \frac{2AY}{b} \\ &= \left(1 + \frac{2A}{b} \right) r\Gamma + \left(1 - \frac{2A}{b} \right) Y. \end{aligned}$$

因此, 对于任意的 $\Gamma > 0$, 有 $\frac{\partial W}{\partial Y} > 0$, 即 W 关于 Y 在区间 $[0, b]$ 上是单调递增的, 因此返券点的最优解为 $Y = b$, 然后带入利润函数可以得到:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} (b^2 + 2br\Gamma + \lambda^2 \Gamma^2) + \frac{1}{b} (2Abr\Gamma - r^2 \Gamma), \\ \text{令 } \frac{\partial W}{\partial \Gamma} &= 0 \text{ 可以解得} \end{aligned}$$

$$\Gamma = \frac{-br^2}{b\lambda^2 + 2Abr - r^2}.$$

当 $x \in \left(0, \frac{-br^2}{b\lambda^2 + 2Abr - r^2} \right]$ 时, $\frac{\partial W}{\partial \Gamma} \geq 0$, 即 W 关于 Γ 是单调递增的; 当 $x \in \left(\frac{-br^2}{b\lambda^2 + 2Abr - r^2}, b \right)$ 时, $\frac{\partial W}{\partial \Gamma} < 0$, W 关于 Γ 是单调递减的. 因此 W 在 $\Gamma = \frac{-br^2}{b\lambda^2 + 2Abr - r^2}$ 时取得最大值.

3 总结

本案例建构的返券销售系统最优策略模型、消费效用函数和利润函数, 有效地帮助学生理解和掌握了高等数学中的知识点, 比如积分和求偏导. 可见, 在实际教学过程中, 从问题中提炼出需要的数学知识, 运用数学建模思想, 构造模型的案例, 不仅能够让学生感受到学以致用, 也能够体现出数学的实际意义, 对提高学生运用数学建模思想观察问题、分析问题、解决问题的能力具有积极作用.

【参考文献】

[1] 马维娜. 教育“有价”“无价”的互构究竟是怎样的——“泽利泽视角”的触发 [J]. 南京师大学报(社会科学版), 2019(5): 22-31.

[2] 陈奥杰. 消费者跨境电商信息偏好程度测算及其影响因素——基于跨境物流产品选择视角 [D]. 杭州: 浙江大学, 2018.

[3] 王伟. 基于零售商返券促销的供应链运作决策与协调策略研究 [D]. 四川: 电子科技大学, 2014.

[4] 安欣. 零售商返券促销策略与模式设计研究 [D]. 四川: 电子科技大学, 2012.

《数学学习与研究》

征稿函

本刊简介

本刊由东北师范大学主管、吉林省数学会和东北师范大学数学与统计学院主办，创刊于1983年，是全国公开发行的省级优秀数学类学术期刊。

本刊秉承“促进学术交流，为数学教育教学服务”的办刊宗旨，坚持“刊物品质第一”的办刊理念，以“数学教育教学研究”为特色，紧跟数学课程改革发展趋势，追踪高考、中考命题热点，及时反映数学教育领域的重大进展，具有较高的知识性、可读性和实用性。

主要栏目

高考研究	中考研究	高教视野
教学方法	案例剖析	数学核心素养
课改前沿	数学教育	教材研究
数学模型	交流平台	专题研究
解题技巧与方法		

投稿须知

1. 稿件要求通过电子邮件投稿（务必是作者认真校对后的定稿），投稿专用邮箱为 sxxxlw@163.com。
2. 本刊自收稿之日起，将在一个月内完成审稿，对拟用的稿件本刊将向作者发出用稿通知，不用稿件恕不另行通知作者，来稿不退还，请作者自备底稿。投稿后30日内未收到用稿通知者，可改投其他杂志。
3. 稿件4800字以上起发，一般不超过10000字。
4. 稿件需有摘要、关键词、参考文献。稿件中的外文字母、数学符号要清晰、规范，正确使用大小写、上下标及正斜体。插图需要线条清晰，标注的文字符号位置准确。
5. 来稿请附作者详细联系方式（姓名、单位、邮编、通讯地址、手机等）。

联系方式

单位名称：数学学习与研究杂志社
通讯地址：吉林省长春市净月开发区
金宝街118号
邮政编码：130117
编辑部电话：0431-84568086

定价：32.00元

ISSN 1007-872X

