

第三章 插值与拟合

教学内容	第一节 一维插值 第二节 二维插值 第三节 用 Matlab 求解插值问题
教学目标	知识目标： 了解插值问题的应用背景；理解插值问题的方法和原理，并对几种插值方法进行对比。掌握插值问题的应用技巧。 能力目标： 通过实例演示、问题驱动等方式激发学生学习的积极性，通过观察对比、学生交流、师生交流、小组探究等多种形式，培养学生的逻辑思维能力、分析判断能力、和解决问题能力。 素质目标： 培养学生敢于质疑、善于分析、勇于创新的精神；培养学生的自主学习意识和团队协作精神；培养学生脚踏实地、不畏艰辛、锲而不舍的精神。
授课学时	2 学时
教学重点	数学建模中的差值与应用技巧
教学难点	应用中差值方法的选取
教学方法	采用问题驱动法、案例演示法、启发式讲授法及自主学习法相结合，以教师的讲解为主，学生的课堂报告、分组讨论为辅，充分调动学生学习的主动性和思考问题的积极性。
教学手段	以课堂讲授为主，主要是多媒体课件和板书相结合的形式。同时借助在线资源，如慕课、雨课堂等平台。
教学过程	根据本次课内容分为若干教学节段，每个节段里，说明教师活动，学生活动，设计意图等模块。 在教学的过程中以案例教学贯穿始终，完整地展示提出问题、分析问题、解决问题的建模过程. 以引导为主，注重学生自主学习。

(一) 课堂引入：通过科学发展历程：17 世纪之后，牛顿，拉格朗日等分别讨论的等距和非等距的一般插值公式。到了近代，数据处理和编制函数表、标准正态分布函数表的来由，98 年美国赛 A 题，生物组织切片的三维插值处理，94 年 A 题逢山开路，山体海拔高度的插值计算，2005 年的雨量预报的评价的插

值计算进行课堂引入（约 10 分钟）

【教师活动】回顾“牛顿，拉格朗日等分别讨论的等距和非等距的一般插值公式”；介绍标准正态分布函数表的来由,98 年美国赛 A 题，生物组织切片的三维插值处理，94 年 A 题逢山开路，山体海拔高度的插值计算,2005 年的雨量预报的评价的插值计算等。

【学生活动】自由讨论插值在工程技术和数据处理等领域的应用背景和范围；

【设计意图】由学生熟悉的内容引入新课，有利于引发学生的认知热

情，提高探究新知的兴趣。

(二) 理论讲解：在引入的基础上，给出插值的基本定义，Lagrange 插值的相关知识点（约 25 分钟）

【教师活动】通过总结与分析课堂引入的内容，给出数学插值的基本定义的概念。

知识点 1: 插值问题的定义，通常是指若已知函数 $y=f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上，在 $n+1$ 个互不相同的观测点 x_0, x_1, \dots, x_n 处的函数值（或观测值）为 y_0, y_1, \dots, y_n ，寻求一个近似函数（即近似曲线） $\varphi(x)$ ，使之满足

$$\varphi(x_i) = y_i, i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

则称 $\varphi(x)$ 为 $f(x)$ 的一个插值函数， $f(x)$ 为被插函数，点 x_i 为插值节点，（3.1）式称为插值条件，区间 $[a,b]$ 称为插值区间。

知识点 2: Lagrange 插值(线性插值、二次插值（抛物线插值）的基

本理论，在计算方法中，利用多项式对某一函数作近似逼近，计算相应的函数值，一般情况下，多项式的次数越多，需要的数据就越多，而预测也就越准确。然而，插值次数越高，插值结果越偏离原函数的现象称为龙格现象。

【学生活动】听讲，有问题可提问。

(三) 程序编写：采用启发式教学，编写 Lagrange 插值的算法程序 (约 10 分钟)

(四) 其他插值算法：采用案例演示法、问题驱动法，通过对若干个与生活息息相关的案例的分析，引出分段线性插值，三次样条插值 (25 分钟)

【教师活动】讲解生活中常见的建模小案例，协同学生积极参与到案例求解过程中来，提出自己的想法，初步讲解出插值的理论步骤。

案例 1: 气温问题

从 1 点 12 点的 11 小时内，每隔 1 小时测量一次温度，测得的温度的数值依次为：5，8，9，15，25，29，31，30，22，25，27，24。试估计每隔 1/10 小时的温度值。

案例 2: 已知飞机下轮廓线上数据如下，求 x 每改变 0.1 时的 y 值。

X	0	3	5	7	9	11	12	13	14	15
Y	0	1.2	1.7	2.0	2.1	2.0	1.8	1.2	1.0	1.6

案例 3: 测得平板表面 3×5 网格点处的温度分别为：

82	81	80	82	84
79	63	61	65	81
84	84	82	85	86

试作出平板表面的温度分布曲面 $z=f(x,y)$ 的图形。

知识点 3: 分段线性插值，三次样条插值的基本理论和算法；

知识点 4: 二维插值的的基本理论和算法；

	<p>【学生活动】 分别对上述三个案例进行讨论，并主动发言，阐述自己对问题的理解</p> <p>【设计意图】 从学生通常有切身体会的实际问题出发，更能提高学生的学习兴趣，在问题解决后也能得到更多的收获感。</p> <p>(五) 用 Matlab 求解插值问题 (10 分钟)</p> <p>【教师活动】 讲解用 Matlab 求解插值问题</p> <p>知识点5: 插值问题的 Matlab 程序。</p> <p>(六) 课程思政 (5 分钟)</p> <p>古语有云：三十而立，四十不惑，五十知天命，六十花甲，利用数学插值的思想，这些就如人生中的节点，需要同学们在不同其余年龄进行人生的“插值”和不断的修正，到底是哪种方法更合理、更有效，就看勤奋与努力。人生就是一次建模的流程，模型的框架与方法有差别，通过介绍这典型的数学模型，让学生意识到数学建模的不可或缺的指导作用，培养学生积极乐观的学习和人生态度。</p> <p>(七) 课堂总结 (5 分钟)</p> <p>总结本次课的教学内容：</p> <p>1() : 插值的定义；</p> <p>2() : 插值的理论；</p> <p>3() : 插值的初步应用。</p>
课后作业	学生课下寻找生活中跟数学模型有关的小案例，进行分析。

教学内容	第四节 数据拟合 第五节 用 Matlab 求解数据拟合问题
教学目标	<p>知识目标： 了解拟合问题的应用背景；理解拟合问题的方法和原理，并对几种拟合方法进行对比.掌握拟合问题的应用技巧。</p> <p>能力目标： 通过实例演示、问题驱动等方式激发学生学习的积极性，通过观察对比、学生交流、师生交流、小组探究等多种形式，培养学生的逻辑思维能力、分析判断能力、和解决问题能力。</p> <p>素质目标： 培养学生敢于质疑、善于分析、勇于创新的精神；培养学生的自主学习意识和团队协作精神；培养学生脚踏实地、不畏艰辛、锲而不舍的精神。</p>
授课学时	2 学时
教学重点	数学建模中的拟合与应用技巧
教学难点	应用中拟合方法的选取
教学方法	采用问题驱动法、案例演示法、启发式讲授法及自主学习法相结合，以教师的讲解为主，学生的课堂报告、分组讨论为辅，充分调动学生学习的主动性和思考问题的积极性。
教学手段	以课堂讲授为主，主要是多媒体课件和板书相结合的形式。同时借助在线资源，如慕课、雨课堂等平台。
教学过程	<p>根据本次课内容分为若干教学节段，每个节段里，说明教师活动，学生活动，设计意图等模块。</p> <p>在教学的过程中以案例教学贯穿始终，完整地展示提出问题、分析问题、解决问题的建模过程。以引导为主，注重学生自主学习。</p> <p>（一）课堂引入：通过我们会经常遇到大量的数据需要处理，而处理数据的关键就在于这些算法，例如数据拟合，2003 年吵的沸沸扬扬的“非典”问题也要用到数据拟合算法，观察数据的走向</p>

进行处理，2001 年的公交车调度拟合问题，2003 年的饮酒驾车拟合问题，2020 年新冠肺炎的感染人数拐点拟合研究进行课堂

引入（约 10 分钟）

【教师活动】2003 年吵的沸沸扬扬的“非典”问题也要用到数据拟合算法，观察数据的走向进行处理，2001 年的公交车调度拟合问题，2003 年的饮酒驾车拟合问题，2020 年新冠肺炎的感染人数拐点拟合研究。

【学生活动】自由讨论拟合在工程技术和数据处理等领域的应用背景和范围；

【设计意图】由学生熟悉的内容引入新课，有利于引发学生的认知热

情，提高探究新知的兴趣。

（二）理论讲解：在引入的基础上，给出拟合的基本定义，不同拟合方法的相关知识点（约 25 分钟）

【教师活动】通过总结与分析课堂引入的内容，给出数学拟合的基本定义的概念。

知识点1: 拟合问题的定义, 数据拟合又称曲线拟合, 是指已知一组 (二维) 数据, 即平面上 n 个点 (x_i, y_j) , $i=1, 2, \dots, n$, 寻求一个函数(曲线) $y = f(x)$, 使 $f(x)$ 在某种准则下与所有数据点最为接近, 即曲线拟合得最好。

知识点 2: 数据拟合与函数插值都是对给定一批数据点, 需确定满足特定要求的曲线或曲面, 但是其解决方案不同。若要求所求曲线(面) 通过所给所有数据点, 就是插值问题; 若不要求曲线(面) 通过所有数据点, 而是要求它反映对象整体的变化趋势, 这就是数据拟合。函数插值与曲线拟合都是要根据一组数据构造一个函数作为近似, 由于近似的要求不同, 二者的数学方法上是完全不同的。

【学生活动】听讲, 有问题可提问。

（三）大讨论：插值与拟合不同之处的大讨论（约 10 分钟）

(四) 拟合算法原理：采用案例演示法、问题驱动法，通过对若干个与生活息息相关的案例的分析，引出线性最小二乘拟合、多项式拟合、非线性最小二乘拟合（25 分钟）

【教师活动】讲解生活中常见的建模小案例，协同学生积极参与到案例求解过程中来，提出自己的想法，初步讲解出拟合的理论步骤。

知识点 3：线性最小二乘拟合

线性最小二乘拟合是解决曲线拟合最常用的方法，其基本思路是，令

$$f(x)=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)+\dots+a_mr_m(x).$$

其中 $r_k(x)$ 是事先选定的一组函数， $a_k(k=1,2,\dots,m,m < n)$ 是待定系数。确定系数 $a_k(k=1,2,\dots,m)$ 的准则为：使 n 个点 (x_i, y_i) 与曲线 $y=f(x)$ 的距离 δ_i 的平方和最小，称为最小二乘准则。

知识点 4：多项式最小二乘拟合

在线性最小二乘法中，若取基函数 $r_1(x)=1, r_2(x)=x, \dots, r_m(x)=x^{m-1}$ ，则此时的线性最小二乘拟合就是多项式拟合问题。

知识点 5：非线性最小二乘拟合是以误差的平方和最小为准则来估计非线性静态模型参数的一种参数估计方法。

【学生活动】分别对上述三个知识点进行讨论，并主动发言，阐述自己对问题的理解。

【设计意图】从学生通常有切身体会的实际问题出发，更能提高学生的学习兴趣，在问题解决后也能得到更多的收获感。

(五) 用 Matlab 求解拟合问题 (10 分钟)

【教师活动】讲解用 Matlab 求解拟合问题实例

案例1: 已知一组实验数据如下表所示，试用最小二乘法求它的二次多项式拟合曲线。

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---

x_i	1	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	10	5	4	2	1	1	2	3	4
<p>(六) 课程思政 (5 分钟)</p> <p>“整理两年大学数据，拟合未来人生方程”，让学生回顾了自己从入校以来的学习生活和心路历程，认真总结了自己的取得的进步和仍然存在的不足。有的同学经过自己的努力做出改变，成绩飞速提升；有的同学积极参加学生组织，练就了过硬的工作本领；通过同学们模型的拟合确立未来两年、五年甚至往后余生的发展情况如何，这不可或缺的指导作用，培养学生积极乐观的学习、生活态度。</p> <p>(七) 课堂总结 (5 分钟)</p> <p>总结本次课的教学内容：</p> <p>1() : 拟合的定义；</p> <p>2() : 拟合的理论；</p> <p>3() : 拟合的应用；</p> <p>4() : 利用 Matlab 求解数据拟合问题。</p>									
课后作业	学生课下寻找生活中跟数学模型有关的小案例，进行分析。								

教学内容	第六节 建模案例 第七节 思考与练习
教学目标	<p>知识目标： 了解插值与拟合问题的应用背景；理解插值与拟合问题的方法和原理，针对具体实际案例进行实际建模演练，最后展开大讨论。</p> <p>能力目标： 通过实例演示、问题驱动等方式激发学生学习的积极性，通过观察对比、学生交流、师生交流、小组探究等多种形式，培养学生的逻辑思维能力、分析判断能力、和解决问题能力。</p> <p>素质目标： 培养学生敢于质疑、善于分析、勇于创新的精神；培养学生的自主学习意识和团队协作精神；培养学生脚踏实地、不畏艰辛、锲而不舍的精神。</p>
授课学时	2 学时
教学重点	具体实际案例进行建模过程的掌握
教学难点	数学建模中的拟合与插值选取技巧
教学方法	采用问题驱动法、案例演示法、启发式讲授法及自主学习法相结合，以教师的讲解为主，学生的课堂报告、分组讨论为辅，充分调动学生学习的主动性和思考问题的积极性。
教学手段	以课堂讲授为主，主要是多媒体课件和板书相结合的形式。同时借助在线资源，如慕课、雨课堂等平台。
教学过程	<p>根据本次课内容分为若干教学节段，每个节段里，说明教师活动，学生活动，设计意图等模块。</p> <p>在教学的过程中以案例教学贯穿始终，完整地展示提出问题、分析问题、解决问题的建模过程。以引导为主，注重学生自主学习。</p> <p>(一) 课堂引入：通过下面实际案例，2004 年 6 月至 7 月黄河进行了第三次调水调沙试验，特别是首次由小浪底、三门峡和万家寨三大水库联合调度，采用接力式防洪预泄放水，形成人造洪</p>

峰进行调沙试验获得成功。整个试验期为 20 多天，小浪底从 6 月 19 日开始预泄放水，直到 7 月 13 日恢复正常供水结束。小浪底水利工程按设计拦沙量为 75.5 亿m^3 ，在这之前，小浪底共积泥沙达 14.15 亿 t。这次调水调沙试验一个重要目的就是由小浪底上游的三门峡和万家寨水库泄洪，在小浪底形成人造洪峰，冲刷小浪底库区沉积的泥沙，在小浪底水库开闸泄洪以后，从 6 月 27 日开始三门峡水库和万家寨水库陆续开闸放水，人造洪峰于 29 日先后到达小浪底，7 月 3 日达到最大流量 $2700 \text{m}^3/\text{s}$ ，使小浪底水库的排沙量也不断地增加进行课堂引入（约 10 分钟）

【教师活动】对实际案例进行问题分析和知识点的架构；

【学生活动】自由讨论问题需要的参数量和处理方法；

【设计意图】由学生熟悉的内容引入新课，有利于引发学生的认知热情，提高探究新知的兴趣。

（二）理论讲解：在引入的基础上，给出对应的参数和初步模型的建立与求解（约 30 分钟）

【教师活动】通过总结与分析课堂引入的内容，给出对应的参数和初步模型的建立与求解。

知识点 1: 根据所给问题的试验数据，要计算任意时刻的排沙量，就要确定出排沙量随时间变化的规律，可以通过插值来实现。考虑到实际中的排沙量应该是时间的连续函数，为了提高模型的精度，采用三次样条函数进行插值。

知识点 2: 从试验数据可以看出，开始排沙量是随着水流量的增加而增长，而后是随着水流量的减少而减少。显然，变化规律并非是线性的关系，为此，把问题分为两部分，从开始水流量增加到最大值 $2720 \text{m}^3/\text{s}$ （即增长的过程）为第一阶段，从水流量的最大值到结束为第二阶段，分别来研究水流量与排沙量的关系。

【学生活动】听讲，有问题可提问。

（三）大讨论：插值与拟合不同之处的大讨论（约 5 分钟）

（四）思考与练习：采用教材本节给出课后练习，同学们自主选

	<p>取题目进行练习 (25 分钟)</p> <p>【教师活动】同学们自主选取题目进行练习时，根据同学们提出的问题单独答疑和讨论。</p> <p>【学生活动】自主选取题目进行练习。</p> <p>【设计意图】从学生通常有切身体会的实际问题出发，更能提高学生的学习兴趣，在问题解决后也能得到更多的收获感。</p> <p>(五) 选取 2-5 名同学讲解 (15 分钟)</p> <p>【教师活动】根据同学们选取题目的不同，选取 2-5 名同学现场解答，并提出自己对于插值与拟合的理解和疑惑点</p> <p>(六) 本章小结 (5 分钟)</p> <p>总结本次课的教学内容：</p> <p>1() : 插值与拟合在实际案例里的不同用法；</p> <p>2() : 数学建模的建立流程；</p> <p>函数插值和曲线拟合都是要根据一组数据构造一个函数作为近似，由于近似的要求不同，二者在数学方法上是完全不同的。</p>
课后作业	对于本章的知识点、难点重新梳理，写出小结.

